# 関数が星型であるための十分条件について(単葉関数論の新しい展開について)



坂口, 杲一

数理解析研究所講究録
821巻 1993年 41-46



# 関数が星型であるための十分条件について

坂口杲一 (奈良産業大学)

## 1. 序文

Petru T. Mocanu [1] はもっと広い定理の系としてではあるが，関数が星型であるための十分条件として，次のような結果を導いている．

THEOREM A. 関数 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ が開単位円板Uにおいて正則で，条件

(1.1) $$|\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}|<\sqrt{3},\quad z\in U$$

又は条件

(1.2) $$|zf''(z)/f'(z)|<2,\quad z\in U$$

を満たすときは，f(z)はUにおいて星型である．

本ノートでは，関数が $f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+\cdots$ の形をしているときは条件(1.1)，(1.2)はそれぞれ次の(1.3)，(1.4) のように改良できることを示す．

(1.3) $$|\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}|<\sqrt{p(p+2)},\quad z\in U,$$

(1.4) $$|zf''(z)/f'(z)|<p+1,\quad z\in U.$$

## 2. 準備

LEMMA 1. 関数 $f(z)=a_pz^p+\cdots$, $p\geq 1$, が $|z|\leq|z_1|$ において正則で，

(2.1) $$|f(z)|<|f(z_1)|,\quad |z|<|z_1|$$

を満たすときは，

(2.2) $$z_1f'(z_1)/f(z_1)\geq p$$

である．

証明．$f(z)=z^{p-1}F(z)$, $F(z)=a_pz+\cdots$ とおくと，

$$z_1f'(z_1)/f(z_1)=p-1+z_1F'(z_1)/F(z_1).$$

F(z)に対してJackのLemmを使うと，$z_1F'(z_1)/F(z_1)\geq 1$. 故に(2.2) が成り立つ．

〔注〕 このLemma は JackのLemma の改良であり，同時に一般化にもなっている． なお Fukui-Sakaguchi [2] 参照．

LEMMA 2. 関数 $h(z)=1+c_p z^p+c_{p+1}z^{p+1}+\cdots,\ p\geq 1,$ が $|z|\leq|z_1|$ において正則で，2つの条件

(2.3) $$\mathrm{Re}\ h(z)>0,\quad |z|<|z_1|,$$

(2.4) $$\mathrm{Re}\ h(z_1)=0\quad (\text{i.e. } h(z_1) \text{ は純虚数})$$

を満たすときは，

(2.5) $$z_1 h'(z_1)\leq -p(1+|h(z_1)|^2)/2$$

である．

証明．関数 $w(z)=(h(z)-1)/(h(z)+1)=(c_p/2)z^p+\cdots$ を考えれば，仮定により $w(z)$は $|z|\leq|z_1|$ において正則で，かつ

$$|w(z)|<|w(z_1)|=1,\quad |z|<|z_1|.$$

それ故，Lemma 1 により

(2.6) $$z_1 w'(z_1)/w(z_1)\geq p$$

である．所が $z_1 w'(z_1)/w(z_1)=2z_1 h'(z_1)/\{h(z_1)^2-1\}$ であって，$h(z_1)$ は純虚数であるから，(2.6) により (2.5) が得られる．

〔注〕この Lemma 2 は我々が Miller-Mocanu の Lemma と呼んでいるものの改良であり，同時に一般化にもなっている． Lemma 2 は Lemma 1 を使って証明できたが，逆に Lemma 1 は Lemma 2 を使って証明できるのである． その証明を以下に示そう．

$f(z)$が Lemma 1 の仮定を満たすものとする．関数

$$t(z)=\{1-f(z)/f(z_1)\}/\{1+f(z)/f(z_1)\}=1+b_p z^p+\cdots$$

を作れば，$t(z)$は

$$\mathrm{Re}\ t(z)>0,\quad |z|<|z_1| \quad 及び \quad \mathrm{Re}\ t(z_1)=0$$

を満たす．それ故 Lemma 2 により

$$z_1 t'(z_1) \leqq -p(1+|t(z_1)|^2)/2.$$

然るに，等式 $t(z_1)=0$ 及び $z_1 t'(z_1)=-z_1 f'(z_1)/2f(z_1)$ が成り立つ．

よって $$z_1 f'(z_1)/f(z_1) \geqq p.$$

LEMMA 3. 関数 $f(z)=a_p z^p+\cdots$, $p\geqq 1$, が開単位円板Uにおいて正則で，

(2.7) $$|\mathrm{Im}\, f(z)| < K,\quad K>0,\quad z\in U$$

を満たすときは，

(2.8) $$|\mathrm{Im}\, f(z)| \leqq (4K/\pi)\mathrm{Tan}^{-1}|z|^p,\quad z\in U$$

である．この限界は sharpである．

証明．関数 $g(z)=\pi f(z)/2K=(a_p\pi/2K)z^p+\cdots$ を考えると，

$$|\mathrm{Im}\, g(z)| < \pi/2,\quad z\in U$$

である．ここで $w(z)=\{\exp(g(z))-1\}/\{\exp(g(z))+1\}$ とおく．

$|\arg \exp(g(z))| = |\mathrm{Im}\, g(z)| < \pi/2,\ z\in U$ なので，

$$\mathrm{Re}\exp(g(z)) > 0,\quad z\in U.$$

それ故，$w(z)$はUにおいて正則で，そこにおいて $|w(z)|<1$.

加えて $w(z)$ は原点で p位の零点を持つので，一般化された Schwarzの Lemmaにより

$$|w(z)| \leqq |z|^p,\quad z\in U.$$

それ故，$|z|=r<1$ に対して

$$|\arg\{(1+w(z))/(1-w(z))\}| \leqq \max_{|z|=r} |\arg\{(1+z^p)/(1-z^p)\}|, \quad (*)$$

ここで $(1+z^p)/(1-z^p)$, $|z|\leqq r$, は 点$(1+r^{2p})/(1-r^{2p})$ を中心とする，

半径 $2r^p/(1-r^{2p})$ の閉円板上にあるから，

$$(*) = \mathrm{Tan}^{-1}\{2r^p/(1-r^{2p})\} = 2\mathrm{Tan}^{-1} r^p.$$

然るに， $$\exp(g(z))=(1+w(z))/(1-w(z)).$$

よって， $|\mathrm{Im}\, g(z)| = |\arg\{(1+w(z))/(1-w(z))\}| \leqq 2\mathrm{Tan}^{-1}|z|^p,\quad z\in U.$

故に， $|\mathrm{Im}\, f(z)| = (2K/\pi)\,|\mathrm{Im}\, g(z)| \leqq (4K/\pi)\mathrm{Tan}^{-1}|z|^p,\quad z\in U.$

これが sharpであることは，$f(z)=(2K/\pi)\log\{(1+z^p)/(1-z^p)\}$ の場合を考えれば，

明らかである.

LEMMA 4. 関数 $f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$, $p\geqq 1$, が開単位円板Uにおいて正則で,

(2.9) $$|\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}|<p\pi^2/4,\quad z\in U$$

を満たすときは, $f(z)$は原点以外にはU内で零点を持たない.

証明. $f(z)$が原点以外に零点 $c=\rho e^{i\alpha}$, $0<\rho<1$, を持つものと仮定する. 原点から $c$ に至る線分をLで表せば, $f(z)$によるLの像は原点から出て原点に戻る閉曲線になる. 他方 $f(z)$ の形から $f'(0)\neq 0$であり, かつ (2.9) により $f'(z)$は原点以外ではU内で 0 になれないから, この閉曲線は, 方向が連続的に変る接線ベクトル $df(z)$ を持ち, その方向の全変動は$\pi$以上でなければならない. よって

(2.10) $$\int_L |d\ \arg df(z)|\geqq\pi.$$

所が, (2.10)の左辺 $$=\int_0^\rho |d\ \arg(f'(z)e^{i\alpha}\,dr)|,\quad z=re^{i\alpha},$$

$$=\int_L |d\ \operatorname{Im}(\log f'(z))|=\int_L |\operatorname{Im}\,d\log f'(z)|$$

$$=\int_0^\rho |\operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}|\,(1/r)dr,\quad z=re^{i\alpha},\ (*)$$

ここで $zf''(z)/f'(z)$ の展開式は $b_p z^p+\cdots$ の形であり, 加えて (2.9) が成り立つので, Lemma 3 により

$$(*)\ \leqq\int_0^\rho (p\pi\operatorname{Tan}^{-1}r^p)(1/r)\,dr,$$

更に $r>0$ のときは $\operatorname{Tan}^{-1}r^p<r^p$ なので,

$$<\int_0^1 p\pi r^{p-1}\,dr$$

$$=\pi.$$

これは (2.10)に反する. よって, $f(z)$は原点以外にはU内で零点を持たない.

## 3. 定理

THEOREM 1. 関数 $f(z)=z+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+\cdots$ が開単位円板U

において正則で,

(3.1) $$|\mathrm{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}|<\sqrt{p(p+2)}\ ,\quad z\in U$$

を満たすときは, f(z)はUにおいて星型である.

証明. 不等式 $\sqrt{p(p+2)}<p\pi^2/4$ が成り立つことは容易に分かるので, f(z)

は条件(2.9) を満たしている. それ故 Lemm 4 により, f(z)は原点以外にはU内で零

点を持たない. よって, 関数

(3.2) $$h(z)=zf'(z)/f(z)=1+pa_{p+1}z^p+\cdots$$

はUにおいて正則である.

いま仮に $\mathrm{Re}\,h(z)\leqq 0$ となるような z がU内にあるとすれば,

(3.3) $$\mathrm{Re}\,h(z)>0 \ \text{for}\ |z|<|z_1| \ \text{で, かつ}\ \mathrm{Re}\,h(z_1)=0$$

を満たす点 $z_1\in U$ が存在する.

このとき $h(z_1)=iu$, $z_1h'(z_1)=v$ とおけば, Lemma 2 により u, v は実数で,

(3.4) $$v\leqq -p(1+u^2)/2$$

を満たす. なお (3.1) により $f'(z)$ は原点以外ではU内で零点を持てないことが

分かるが, 加えて $f'(0)=1$ なので, U内で $f'(z)$ は 0 にはならない. それ故

h(z)もU内で 0 になることはなく, 従って $u\neq 0$ である.

ここで等式

(3.5) $$zf''(z)/f'(z)=-1+h(z)+zh'(z)/h(z)$$

を用いると,

$$|\mathrm{Im}\{z_1f''(z_1)/f'(z_1)\}|=|u-v/u|,\quad \text{(3.4) を使って,}$$

$$\geqq\{u^2+p(1+u^2)/2\}/|u|$$

$$=\{|u|(p+2)+p/|u|\}/2$$

$$\geqq\sqrt{p(p+2)}.$$

これは (3.1)に反する．よってU内で $\mathrm{Re}\, h(z) = \mathrm{Re}\{zf'(z)/f(z)\} > 0$ でなければならない．

THEOREM 2. Theorem 1 において，(3.1) の代りに

(3.6) $$|zf''(z)/f'(z)| < p+1, \quad z \in U$$

を仮定しても，同じ結論が得られる．即ち，$f(z)$はUにおいて星型である．

証明．$p+1 < p\pi^2/4$ であるから，$f(z)$は(2.9) を満たしている．
それ故，Theorem 1 の証明で用いたのと同様の議論がここでも展開できる．(3.2) で定義される $h(z)$ と，(3.3) を満たすと仮定される点 $z_1$ と，$h(z_1) = iu$ 及び $z_1 h'(z_1) = v$ で定まる実数 u，v に対して，等式(3.5) を用いると，

$$|z_1 f''(z_1)/f'(z_1)|^2 = |-1 + i(u - v/u)|^2$$

$$= 1 + u^2 - 2v + v^2/u^2, \quad \text{(3.4)を用いて，}$$

$$\geq 1 + u^2 + p(1+u^2) + p^2(1+u^2)^2/4u^2$$

$$= (p+1)^2 + \{(p+2)u - p/u\}^2/4$$

$$\geq (p+1)^2.$$

これは(3.6) に反する．それ故，Theorem 1 と同様に $f(z)$ はUにおいて星型でなければならない．

## 参考文献

[1] P. T. Mocanu, Some integral operators and starlike functions, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 31 (1986), 231-235.

[2] S. Fukui and K. Sakaguchi, An extension of a theorem of S. Ruscheweyh, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. Nat. Sci., 29 (1980), 1-3.

Department of Mathematics
Nara Sangyo University
Sango-cho, Nara-ken, Japan